НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И ПАРАЛЕЛКИ НА СУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

ЛОВЕЧ – 2019

РЕШЕНИЯ – ОСМИ КЛАС

1. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - \sqrt{14} = \sqrt{7}\,x - \sqrt{2}\,x$, пресметнете стойността на израза $x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4$.

Решение. Нормалният вид на даденото уравнение е $x^2 - \left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)x - \sqrt{14} = 0$. От формулите на Виет получаваме $x_1 + x_2 = \sqrt{7} - \sqrt{2}$, $x_1 x_2 = -\sqrt{14}$, откъдето

$$x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 = (x_1 x_2)^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) = (x_1 x_2)^2 \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2\right] =$$

$$= \left(-\sqrt{14}\right)^2 \left[\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{14}\right] = 14\left(7 + 2 - 2\sqrt{14} + 2\sqrt{14}\right) = 126$$

Отговор: 126

2. Броят на всички диагонали в един изпъкнал многоъгълник е 20. Колко страни има многоъгълникът?

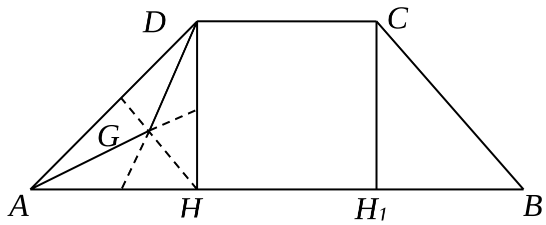
Решение. Нека n е броят на върховете на дадения многоъгълник. Тогава всевъзможните прави, които минават през тези точки са C_n^2 на брой. Стойността на израза $C_n^2 - n$ определя, колко са диагоналите на многоъгълника. Оттук и условието имаме

$$C_n^2 - n = 20 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = 20 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 40 = 0.$$

Последното уравнение има корени $n_1 = 8$ и $n_2 = -5$. Следователно страните на многоъгълника е 8.

Отговор: 8

3. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ $\left(AB \parallel CD, AB > CD\right)$, за който $AB = 20\,см$ и $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ и височината му има дължина 8 см. Ако $DH \perp AB$ $(H \in AB)$ и G е медицентърът на ΔAHD намерете $S_{\Delta ADG} : S_{ABCD}$.



Решение. Тъй като $\sphericalangle AHD = 90^\circ$ и $\sphericalangle HAD = 45^\circ$, то $AH = HD = 8\,см$. Нека $CH_1 \perp AB$ ($H_1 \in AB$). От $\Delta AHD \cong \Delta CH_1B$ следва, че $AH = BH_1 = 8\,см$. Тъй като фигурата HH_1CD е правоъгълник, то $HH_1 = CD = 20 - 2.8 = 4\,см$. Намираме лицето на трапеца

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} CH_1 = \frac{20 + 4}{2} 8 = 96\ см^2.$$

След това намираме, че лицето на ΔAHD е $32\,см^2$. Тъй като $S_{\Delta ADG} = \frac{1}{3} S_{\Delta AHD}$, следователно $S_{\Delta ADG} = \frac{32}{3} см^2$. Накрая определяме отношението $S_{\Delta ADG} : S_{ABCD} = 1:9$

Отговор: 1 : 9

4. а) Докажете, че за произволно реално число t е в сила $\frac{4t}{t^2 + 4} \le 1$.

б) Намерете всички реални числа a, b и c, такива че

$$\frac{4a^2}{a^2+4}=b$$

$$\frac{4b^2}{b^2+4}=c$$

$$\frac{4c^2}{c^2+4}=a$$

Решение. а) За произволно реално число t имаме $0\le(t-2)^2=t^2-4t+4$, откъдето $4t\le t^4+4$ и значи $\frac{4t}{t^2+4}\le 1$ (защото $t^2+4>0$).

б) От условието за a, b и c следва, че те са неотрицателни. Оттук и предната поддочка получаваме

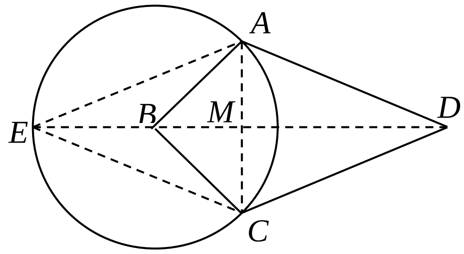
$$a\ge\frac{4a^2}{a^2+4}=b\ge\frac{4b^2}{b^2+4}=c\ge\frac{4c^2}{c^2+4}=a,$$

откъдето $a=b=c$. Заествайки в първото уравнение, имаме $\frac{4a^2}{a^2+4}=a$, откъдето $a\left(a^2-4a+4\right)=0$.

Следователно $a=b=c=0$ или $a=b=c=2$.

Отговор: $a=b=c=0$ или $a=b=c=2$

5. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е такъв, че $\sphericalangle ABD=2\sphericalangle BDC$, $\sphericalangle CBD=2\sphericalangle BDA$ и $AB=BC$. Да се докаже, че $AD=DC$.



Решение. Нека продължението на отсечката BD пресича окръжността с център B и радиус AB в точка E. Тогава $\sphericalangle AED=\frac{1}{2}\sphericalangle ABD=\sphericalangle BDC$ и $\sphericalangle CED=\frac{1}{2}\sphericalangle CBD=\sphericalangle ADB$, откъдето $AECD$ е успоредник. Нека M е пресечната точка на AC и BD (т.е. на AC и BE). Тогава M е среда на отсечката AC и следователно BM е медиана, височина и ъглополовяща в равнобедрения триъгълник ACB. Оттук $\sphericalangle ABD=\sphericalangle CBD$, откъдето $\sphericalangle AED=\sphericalangle EDA$ и значи $DA=AE$. Оттук $AD=CD$.

6. Около кръгла маса са наредени 12 стола, като 6 от тях са бели, а другите 6 – черни. 12 човека се подреждат около масата и на всеки от тях (по случаен начин) се дава бяла или черна шапка. Докажете, че хората могат да се завъртят (да се придвижат без да променят съседа си отляво и отдясно), така че, след като седнат, на поне 6 от тях цветът на стола и шапката им да съвпадат.

Решение. I начин. Ще казваме, че един човек е щастлив, ако цветът на стола и шапката му съвпадат. Нека при началното разположение имаме x_1 щастливи хора. Да завъртим хората на един стол в едната посока и нека при новото разположение имаме x_2 щастливи хора. Продължаваме да завъртаме по същия начин докато всички не се върнат на първоначалните си места и получаваме числата x_3 , x_4 и т.н. x_{12}. При едно пълно завъртане всеки е бил щастлив точно 6 пъти (защото е минал през шестте стола с цвета на шапката му). Следователно общо щастливите хора са били 12.6 = 72, откъдето получаваме:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{12}=72.$$

Тъй като сборът на 12 числа е 72, то поне едно от числата ще бъде поне 6, т.е. ще има момент в който има поне 6 щастливи човека.

II *Начин*. Нека номерираме столовете и хората с числата от 1 до 12 като считаме, че при първоначалното заставане до масата, човекът с номер i е застанал до стола със същия номер. Нека сега за $1 \le i \le 12$ положим $x_i = 1$, ако столът с номер i е бял, и $x_i = -1$, ако столът с номер i е черен. Аналогично, за $1 \le i \le 12$ полагаме $y_i = 1$, ако човекът с номер i носи бяла шапка, и $y_i = -1$, ако човект с номер i носи черена шапка. Тогава $x_i y_j = 1$, ако цветовете на стола с номер i и човека с номер j съвпадат, и $x_i y_j = -1$ в противен случай. Следователно, ако $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{12} y_{12} \ge 0$, то при първоначалното заставане за поне шест от хората, цветът на шапката и на стола съвпадат. Аналогично, ако $x_2 y_1 + x_3 y_2 + \cdots + x_{12} y_{11} + x_1 y_{12} \ge 0$, то ако хората се завъртят с една стъпка по посока на часовниковата стрелка, то за поне шест от тях цветът на шапката и стола ще съвпадат. В общия случай, ако $x_j y_1 + x_{j+1} y_2 + \cdots + x_{12} y_{13-j} + x_1 y_{14-j} + \cdots + x_{j-1} y_{12} \ge 0$ то ако хората се завъртят с j стъпки по посока на часовниковата стрелка, то за поне шест от тях цветът на шапката и стола ще съвпадат.
Следователно трябва да докажем, че поне едно от числата

$$a_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{11} y_{11} + x_{12} y_{12}$$
$$a_1 = x_2 y_1 + x_3 y_2 + \cdots + x_{12} y_{11} + x_1 y_{12}$$
$$a_2 = x_3 y_1 + x_4 y_2 + \cdots + x_1 y_{11} + x_2 y_{12}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{11} = x_{12} y_1 + x_1 y_2 + \cdots + x_{10} y_{11} + x_{11} y_{12}$$

е неотрицателно. За сумата на числата имаме

$$\sum_{j=0}^{11} a_j = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{12})(y_1 + y_2 + \cdots + y_{12}).$$

Но съгласно условието $x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = 0$, откъдето $\sum_{j=0}^{11} a_j = 0$ и значи $a_j \ge 0$ за някое j.

ДЕВЕТИ КЛАС

1. Намерете квадратна функция, върхът на параболата на която лежи на правите с уравнения $y = 2x - 1$ и $y = 5 - x$, а най-голямата ѝ стойност в интервала $[0; 3]$ е 6.

Решение. Нека параболата е $f(x) = ax^2 + bx + c$ с връх $V(x_0; y_0)$. От $y_0 = 2x_0 - 1$ и $y_0 = 5 - x_0$ намираме $2x_0 - 1 = 5 - x_0$, откъдето $x_0 = 2$ и $y_0 = 3$. Тогава $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 2$, откъдето $b = -4a$. От $y_0 = f(x_0)$ получаваме $c - 4a = 3$. От $y_0 < 6$, $x_0 \in [0; 3]$ и $\max\limits_{x \in [0;3]} f(x) = 6$ следва, че $a > 0$ и този максимум се достига при $x = 0$ (в по-отдалечения от $x_0 = 2$ край на интервала), като $f(0) = 6$ и следователно $c = 6$. Тогава $a = \dfrac{c-3}{4} = \dfrac{3}{4}$, $b = -4a = -3$ и $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 6$.

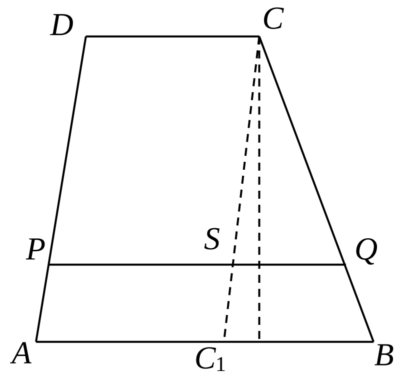
Отговор: $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 6$.

2. С помощта на цифрите 2, 3, 6, 7, 9 са записани всички петцифрени числа с различни цифри и по случаен начин е избрано едно от тях. Намерете вероятността това число да се дели на 4.

Решение. Броят на всички петцифрени числа с различни цифри е $P_5 = 5! = 120$. Всички числа, кото се делят на 4 завършват на 36, 76, 96, 32, 72, 92 и техният брой е $6.P_3 = 36$. Търсената верояност е $P = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$

Отговор: $\frac{3}{10}$

3. Дължините на основите на трапец са 10 см и 6 см. Намерете дължината на отсечката, която е успоредна на тези основи и разделя дадения трапец на два трапеца, чиито лица се отнасят както 1 : 3, считано от голямата към малката основа.



Решение. Построяваме $PQ \parallel AB,\ P \in AD,\ Q \in BC$ и $CC_1 \parallel AD,\ CC_1 \cap PQ = S$. Нека $PQ = c$. От условието следва, че $\frac{S_{ABQP}}{S_{PQCD}} = \frac{\frac{10+c}{2}h_2}{\frac{6+c}{2}h_1} = \frac{1}{3}, \frac{h_2}{h_1} = \frac{6+c}{3(10+c)}$.

От $\triangle SQC \sim \triangle C_1BC$ следва, че

$$\frac{SQ}{C_1B} = \frac{h_1}{h_1+h_2} \Rightarrow, \frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{c-6}{4} \Rightarrow \frac{h_1+h_2}{h_1}\frac{4}{c-6} \Rightarrow 1 + \frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{c-6} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{c-6} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{c-6} - 1 = \frac{6+c}{3(10+c)}$$

Решения на последното уравнение са числата $\pm 2\sqrt{21}$, от които отговор е числото $2\sqrt{21}$.

Отговор: $2\sqrt{21}$

4. Решете уравнението $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$

Решение. $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$, *ДС*: $x \neq 0$

Полагаме $t = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$. След повдигане на двете страни на квадрат получаваме $t^2 + \frac{8}{3} = \frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} \Rightarrow 3t^2 + 8 = \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2}$. След заместване в уравнението получаваме $3t^2 - 10t + 8 = 0$, откъдето $t_1 = \frac{4}{3}, t_2 = 2$. След решаване на двете уравнения $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}$ и $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2$, получаваме корените $x_1 = -2;\ x_2 = 6;\ x_3 = 3 - \sqrt{21};\ x_4 = 3 + \sqrt{21}$.

5. а) Ако едно двуцифрено число разделим на произведението от цифрите му, ще получим частно 3 и остатък 9. Ако към сбора от квадратите на цифрите му прибавим тяхното произведение, ще получим самото число. Намерете числото.

б) Нека $\frac{m}{n}$ е правилна несъкратима дроб и m, n са естествени числа. Ако е известно, че дробта $\frac{3n-m}{5n+2m}$ е съкратима, намерете естествено число, на което тя може да се съкрати.

Решение. а) Нека $\overline{xy} = 10x + y$, където $\left| \begin{array}{l} 0 < x \leq 9 \\ 0 < y \leq 9 \end{array} \right.$ и x, y са естествени числа. От условието получаваме $\left| \begin{array}{l} \frac{10x+y}{xy} = 3\frac{9}{xy} \\ x^2 + y^2 + xy = 10x + y \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 10x + y = 3xy + 9 \\ x^2 + y^2 + xy = 10x + y \end{array} \right. \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 9 \Rightarrow x - y = \pm 3$.

Решаваме двете системи $\begin{vmatrix} x-y=-3 \\ 10x+y=3xy+9 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x-y=3 \\ 10x+y=3xy+9 \end{vmatrix}$. Първата система няма решение.

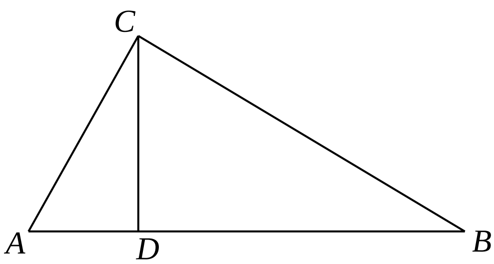
За втората система получаваме $y_1=-\dfrac{7}{3}$, което не принадлежи на допустимите стойности и $y_2=3$. Тогава $x=6$ и търсеното число е 63.

б) Щом $\dfrac{3n-m}{5n+2m}$ е съкратима, то $\begin{vmatrix} 3n-m=kp \\ 5n+2m=ks \end{vmatrix}$, където $k=НОД\left(3m-n,5n+2m\right)$, $\left(k>1\right)$ и p и s са взаимно прости. Умножаваме първото уравнение с 2, събираме почленно и получаваме $n=\dfrac{k\left(2p+s\right)}{11}$ и $m=\dfrac{k\left(3s-5p\right)}{11}$. Тъй като по условие m и n са взаимно прости, то следва, че $k=11$. Дробта $\dfrac{3n-m}{5n+2m}$ може да се съкрати на 11.

6. а) Докажете, че за всеки правоъгълен триъгълник сборът от квадратите на двата катета е равен на квадрата на хипотенузата.

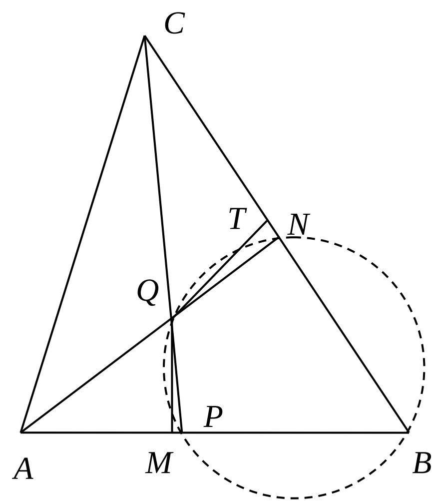
б) В $\triangle ABC$ ъглополовящите $AN\left(N\in BC\right)$ и $CP\left(P\in AB\right)$ се пресичат в точка Q. Ако дължината на отсечката PN е 1 сантиметър, а върхът B лежи на окръжността, която минава през точките N, P и Q, намерете страните и ъглите на $\triangle PNQ$ и на $\triangle ABC$.

Решение. а) Нека за $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB=90^\circ$, $AB=c,\ AC=b,\ BC=a$ и $CD\perp AB$. Означаваме $BD=x$, тогава $AD=c-x$. От $\triangle ADC\sim\triangle ACB$ имаме $\dfrac{c-x}{b}=\dfrac{b}{c}$ и значи $b^2=c^2-cx$. От $\triangle BDC\sim\triangle ACB$ имаме $\dfrac{x}{a}=\dfrac{a}{c}$, откъдето $a^2=cx$. Чрез събиране почленно на двете равенства, получаваме $a^2+b^2=c^2$.



б) Нека означим ъглите на $\triangle ABC$ с α,β и γ, тогава $\sphericalangle CAQ=\dfrac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle ACQ=\dfrac{\gamma}{2}$ и следователно $\sphericalangle AQC=\sphericalangle PQN=180-\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=90^\circ+\dfrac{\beta}{2}$. Четириъгълникът $PBNQ$ е вписан в окръжността, откъдето $\sphericalangle PQN+\sphericalangle PBN=180^\circ$, т.е. $90^\circ+\dfrac{\beta}{2}+\beta=180^\circ$ и значи $\beta=60^\circ$. Оттук $\sphericalangle PQN=120^\circ$. Тъй като BQ е ъглополовяща, то $\sphericalangle PBQ=\sphericalangle NBQ=30^\circ$ и $PQ=QN\Rightarrow PQ=QN$, т.е. $\triangle PNQ$ е равнобедрен и $\sphericalangle QPN=\sphericalangle QNP=30^\circ$.

Разглеждаме равнобедрения триъгълник PQN с основа 1 сантиметър и ъгли при основата 30°. Ако QD е височината към основата, от доказаното в а) намираме $PQ=QN=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Нека $QT\left(T\in BC\right)$ и $QM\left(M\in AB\right)$ са радиусите на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. От $\triangle TBQ\cong\triangle MBQ$, следва че $BT=BM$. От $\triangle TNQ\cong\triangle MPQ$, следва че $NT=PM$. Следователно $BN=BP$. От $\beta=60^\circ$, следва че $\triangle PBN$ е равностранен и $CP\perp AB, AN\perp BC,$ т.е. $\triangle ABC$ е равностранен. Тъй като PN се явява негова средна отсечка, то страната му $AC=2PN=2$.

ДЕСЕТИ КЛАС

1. Намерете сбора от целите решения на системата:

$$\begin{cases} x^4-35x^2-36\le 0 \\ \dfrac{3x-16}{x-5}\le x \end{cases}$$

Решение. Решаваме всяко от двете неравенства:

$$x^4-35x^2-36\le 0 \Leftrightarrow (x^2-36)(x^2+1)\le 0 \Leftrightarrow x^2-36\le 0 \Leftrightarrow x\in[-6;6\,]$$

$$\frac{3x-16}{x-5}\le x \Leftrightarrow \frac{3x-16}{x-5}-x\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2(x-5)\ge 0 \\ x\ne 5 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{4\}\cup(5;+\infty)$$

Така получаваме, че $\begin{cases} x^4-35x^2-36\le 0 \\ \dfrac{3x-16}{x-5}\le x \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{4\}\cup(5;6]$. Тогава търсеният сбор е 4+6=10.

Отговор: 10

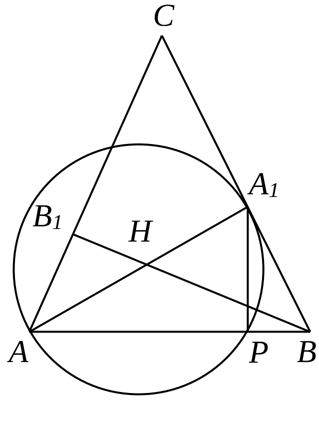
2. Дадена е функцията $f(x)=ax^2+bx+c$. Да се намери най-малката ѝ стойност в интервала $[-1;1]$, ако графиката ѝ минава през точката с координати (2; 8), а корените на уравнението $f(x)=0$ са 1 и –2.

Решение. Тъй като графиката на дадената функция минава през точка с координати (2; 8), то $4a+2b+c=8$. От условието, че корени на уравнението $f(x)=0$ са 1 и –2, следва, че $a+b+c=0$ и $4a-2b+c=0$.

Решения на системата $\begin{cases} 4a+2b+c=8 \\ 4a-2b+c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$ са числата $a=b=2, c=-4$. Така получаваме функцията $f(x)=2x^2+2x-4$. Тъй като $x_v=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2}\in[-1;1]$ и $a=2>0$, то най-малката стойност на функцията е $y_{НМС}=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4.5$

Отговор: -4.5

3. Ортоцентърът на ΔABC е център на окръжност, която минава през точка A, допира се до страната BC и пресича страната AB в точка P, като AP = 8 см, BP = 2 см. Да се намери радиуса на описаната около ΔABC окръжност.



Решение. Нека AA_1 е височина в ΔABC. Тогава ΔABA_1 е правоъгълен. От условието, че H е център на окръжността, която минава през точка A и се допира до BC в точка A_1, следва, че AA_1 е диаметър на тази окръжност, $AH=HA_1$ и $\sphericalangle APA_1=90^\circ$. От метрични зависимости в правоъгълен ΔABA_1 получаваме, че $BA_1^2=BP.BA=2.10=20$, т.е. $BA_1=2\sqrt{5}$. Така получаваме, че $AA_1^2=8.10=80$, т.е. $AA_1=4\sqrt{5}$ и $AH=HA_1=2\sqrt{5}$. Тогава в ΔHBA_1 имаме $\sphericalangle BHA_1=45^\circ$. Следователно $\sphericalangle A_1HB_1=135^\circ$. От четириъгълника A_1CB_1H получаваме, че $\sphericalangle A_1CB_1=45^\circ$. От синусова теорема за ΔABC получаваме $\dfrac{AB}{\sin 45^\circ}=2R$ и следователно $R=5\sqrt{2}$.

Отговор: $5\sqrt{2}$

4. Да се реши неравенството $\sqrt{2x+3}+\sqrt{7-2x}\le 4$

Решение. Множеството от допустимите стойности е $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$. След повдигане на втора степен, получаваме

$$10+2\sqrt{2x+3}\sqrt{7-2x}\le 16 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}\sqrt{7-2x}\le 3$$

След ново повдигане на втора степен, намираме $x^2-2x-3\ge 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)\ge 0$ и следователно $x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. От множеството от допустими стойности получаваме:

$$x\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]\cup\left[3,\frac{7}{2}\right]$$

Отговор: $x\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]\cup\left[3,\frac{7}{2}\right]$

5. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които всяко число от интервала $[-3;2]$ е решение на неравенството $ax^2+ax-12\le 0$.

Решение. Да означим $f(x)=ax^2+ax-12$. При $a=0$ неравенството става $-12\le 0$ и е изпълнено за всяко x.

Нека $a>0$. Всяко число от интервала [–3;2] е решение на неравенството тогава и само тогава, когато $f(-3)\le 0$ и $f(2)\le 0$. Тъй като $f(-3)=f(2)=6a-12$, то решенията са $a\in(0,2]$.

Нека $a<0$. Тъй като $f(-3)\le 0$ и $f(2)\le 0$ и върхът на графиката на $f(x)$ е с абсциса $x=-\frac{1}{2}$, като $-\frac{1}{2}\in[-3,2]$, то всяко число от интервала [–3;2] е решение на неравенството от условието тогава и само тогава, когато неравенството $f(x)>0$ няма решение. Следователно $D=a^2+48a\le 0$, откъдето $a\in[-48,0)$.

Отговор: $a\in[-48,2]$

6. Дадени са три букви – a, b и c. Намерете броя на думите с дължина 8 в които не се среща aaa, bbb, или ccc.

Решение. Дума, която не съдържа три последователни равни букви, ще наричаме добра. Да означим с x_n броя на добрите думи с дължина n, които завършват с две еднакви букви, а с y_n– броя на добрите думи с дължина n, които завършват с две различни букви. Ако t_n е броят на добрите думи с дължина n, то $t_n=x_n+y_n$.

Ако изтрием последната буква на добра дума с дължина $n+1$, ще получим добра дума с дължина n. Това означава, че всяка добра дума с дължина $n+1$ се получава с добавяне на една буква към добра дума с дължина n.

От добра дума с дължина n, завършваща на две еднакви букви, могат да се получат две добри думи с дължина $n+1$, завършващи на две различни букви и нито една добра дума с дължина $n+1$, завършваща на две еднакви букви (например, ако последните две букви са aa, те могат да бъдат разширени до aab или aac, но не до aaa).

От добра дума с дължина n, завършваща на две различни букви, могат да се получат две добри думи с дължина $n+1$, завършващи на две различни букви и една добра дума с дължина $n+1$, завършваща на две еднакви букви (например, ако последните две букви са ab, те могат да бъдат разширени до aba, или abc, или abb).

Следователно $x_{n+1} = y_n$ и $y_{n+1} = 2y_n + 2x_n$, откъдето $y_{n+1} = 2t_n$ и $x_{n+1} = y_n = 2t_{n-1}$. Оттук намираме $t_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 2t_{n-1} + 2t_n$. Тъй като $t_1 = 3$, $t_2 = 9$, $t_3 = 24$, получаваме $t_4 = 66$, $t_5 = 180$, $t_6 = 492$, $t_7 = 1344$, $t_8 = 3672$.

Отговор: 3672

ЕДИНАДЕСЕТИ КЛАС

1. Намерете отношението $\dfrac{S}{2019}$, където S е сборът на всички естествени числа, които са решения на неравенството $x^3 - 2019x^2 + 2019 \leq x$.

Решение. $x^3 - 2019x^2 + 2019 \leq x \Leftrightarrow \left(x-2019\right)x^2 - \left(x-2019\right) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-2019\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -1\right] \cup \left[1; 2019\right]$.

Естествените числа, които са решения на неравенството, са $1, 2, 3, ..., 2018, 2019$, сборът им е $S = 1+2+3+ ... + 2018+2019 = \dfrac{1+2019}{2}.2019 = 1010.2019$ и $\dfrac{S}{2019} = 1010$.

Отговор: 1010.

2. Нека $0 < x_2 < x_1$ са корените на уравнението $x^2 - 4x + m = 0$, а $0 < y_2 < y_1$ – корените на $y^2 - y + n = 0$. Намерете произведението mn, ако x_1, x_2, y_1, y_2, взети в този ред, образуват намаляваща геометрична прогресия.

Решение. Нека числата $0 < y_2 < y_1 < x_2 < x_1$ образуват намаляваща геометрична прогресия с частно q $\left(0 < q < 1\right)$. Тогава $x_2 = x_1 q,\ y_1 = x_1 q^2,\ y_2 = x_1 q^3$.

От формулите на Виет следва, че $x_1 x_2 = m,\ y_1 y_2 = n$ и $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 + x_1 q = 4 \\ x_1 q^2 + x_1 q^3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

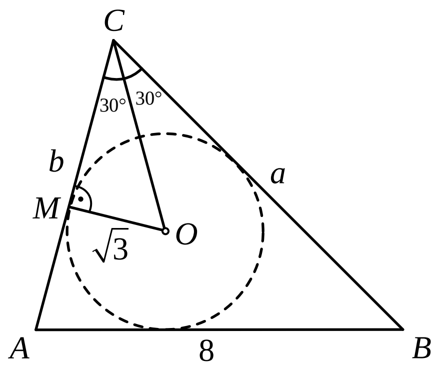
$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1\left(1+q\right) = 4 \\ x_1 q^2 \left(1+q\right) = 1. \end{array}\right.$

Делим почленно и от $q^2 = \dfrac{1}{4}$, $0 < q < 1$, получаваме $q = \dfrac{1}{2}$ и $x_1 = \dfrac{4}{1+q} = \dfrac{8}{3}$.

Корените на двете уравнения са $x_1 = \dfrac{8}{3}$, $x_2 = \dfrac{4}{3}$, $y_1 = \dfrac{2}{3}$, $y_2 = \dfrac{1}{3}$ и $mn = x_1 x_2 y_1 y_2 = \dfrac{64}{81}$.

Отговор: $mn = \dfrac{64}{81}$.

3. Намерете лицето на $\triangle ABC$ със страна $AB = 8$, $\sphericalangle C = 60^\circ$ и радиус $r = \sqrt{3}$ на вписаната в триъгълника окръжност.



Решение. Нека окръжността $k\left(O; r = \sqrt{3}\right)$ е вписана в $\triangle ABC$ с $\sphericalangle C = 60^\circ$ и страни $AB = c = 8$, $BC = a$ и $AC = b$.

Ако M е допирната точка на k със страната AC, то

$OM \perp AC$, CO е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ и от правоъгълния $\triangle OMC$ намираме $CM = OM.\text{cotg}\,30° = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$.

От $CM = \dfrac{a+b-c}{2} = p-c$ получаваме, че $p=11$ и $S_{ABC} = pr = 11.\sqrt{3}$.

Отговор: $S_{ABC} = 11\sqrt{3}$.

4. Да се докаже, че едно число s е рационално тогава и само тогава, когато съществуват рационални числа a, b и c, такива че числата $s+a$, $s+b$ и $s+c$ са различни и образуват геометрична прогресия.

Решение. Необходимо и достатъчно условие числата $s+a$, $s+b$ и $s+c$ да образуват геометрична прогресия е $(s+b)^2 = (s+a)(s+c)$, което е еквивалентно на $(2b-a-c)s = ac-b^2$. Ако $2b-a-c=0$ трябва и $0 = ac-b^2 = ac-\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 = -\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2$, т.е. $a=c$. Оттук $b=a=c$, което не е възможно. Следователно $s = \dfrac{ac-b^2}{2b-a-c}$ ще е рационално, ако a, b и c са рационални.

Обратно, ако $s=0$ за $a=1$, $b=2$ и $c=4$ числата $s+a$, $s+b$ и $s+c$ образуват геометрична прогресия. Ако $s \neq 0$ за $a=0$, $b=1$ и $c = 2+\dfrac{1}{s}$ числата $s+a$, $s+b$ и $s+c$ също са рациоаналии и образуват геометрична прогресия.

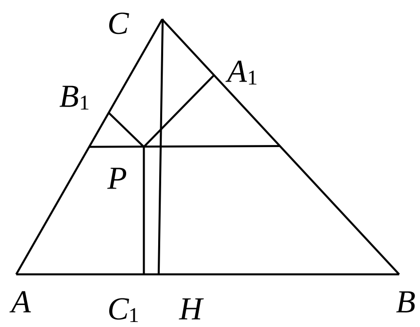
5. Нека $\triangle ABC$ е остроъгълен, точките M и N са среди съответно на отсечките AC и BC и точката P е вътрешна за отсечката MN. От точката P са спуснати перпендикуляри към страните AB, AC и BC на триъгълника, които ги пресичат съответно в точките C_1, B_1 и A_1.

а) Да се изрази лицето на триъгълника $A_1B_1C_1$ чрез страните на триъгълника ABC, радиусът R на описаната около ABC окръжност и отношението $x = \dfrac{PN}{MN}$.

б) Да се определи x така, че лицето на $\triangle A_1B_1C_1$ да е най-голямо.

в) Да се изрази отношението на най-голямото лице на $\triangle A_1B_1C_1$ към лицето на $\triangle ABC$ чрез $\alpha = \sphericalangle BAC$ и $\beta = \sphericalangle ABC$.

Решение. Използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$.



а) Тъй като MN е средна отсечка за $\triangle ABC$, то $PC_1 = \dfrac{h_c}{2} = \dfrac{S}{c}$ и $\sphericalangle PNC = \beta$, $\sphericalangle PMC = \alpha$. Тогава $PA_1 = PN\sin\beta = \dfrac{xc}{2}\dfrac{b}{2R} = \dfrac{Sx}{a}$ и $PB_1 = MP\sin\alpha = \dfrac{(1-x)c}{2}\dfrac{a}{2R} = \dfrac{S(1-x)}{b}$. За лицето S_1 на $\triangle A_1B_1C_1$ имаме, че

$$S_1 = S_{A_1B_1P} + S_{A_1C_1P} + S_{B_1C_1P} = \frac{1}{2}\left(PA_1.PB_1\sin\sphericalangle B_1PC_1 + PA_1.PC_1\sin\sphericalangle A_1PC_1 + PB_1.PC_1\sin\sphericalangle B_1PC_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{S^2x(1-x)}{ab}\sin\gamma + \frac{S^2x}{ac}\sin\beta + \frac{S^2(1-x)}{bc}\sin\alpha\right) = \frac{S^2}{2abc}\left(x(1-x)\frac{c^2}{2R} + x\frac{b^2}{2R} + (1-x)\frac{a^2}{2R}\right)$$

$$= \frac{abc}{64R^3}\left(c^2x(1-x)+b^2x+a^2(1-x)\right) = \frac{abc}{64R^3}\left(-c^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+a^2\right).$$

б) Нека $f(x) = -c^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+a^2 = -cx^2+2bc\cos\alpha x+a^2$. Най-голямата стойност на $f(x)$ в интервала $(0;1)$ се достига за $x_0 = \frac{b}{c}\cos\alpha = \frac{AH}{AB} \in (0;1)$, където H е петата на височината през върха C. Така лицето на $\triangle A_1B_1C_1$ е максимално за

$$x = x_0 = \frac{b}{c}\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}.$$

в) Максималното лице на $\triangle A_1B_1C_1$ е

$$\frac{abc}{64R^3}f(x_0) = \frac{abc}{64R^3}(b^2\cos^2\alpha+a^2) = \frac{S}{16R^2}(b^2\cos^2\alpha+a^2) = \frac{S}{4}(\sin^2\beta\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$

$$= \frac{S}{4}(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta).$$

Така търсеното отношение е $\frac{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}{4}$.

6. Нека n е естествено число и $T(n)$ е броят на триъгълниците с периметър n, чиито страни са естествени числа.

а) Да се сравнят числата $T(2016)$ и $T(2019)$.

б) Да се сравнят числата $T(2019)$ и $T(2022)$.

в) Да се пресметне $T(2019)$.

Решение. а) На всеки триъгълник със страни a, b и c и периметър 2019 можем да съпоставим триъгълник със страни $a+1$, $b+1$ и $c+1$, чийто периметър е 2019. Ясно е, че на различните целочислени триъгълници с периметър 2016 съответстват различни целочислени триъгълници с периметър 2019. Тогава $T(2019) \geq T(2016)$. Триъгълникът със страни 1, 1009, 1009 не съответства на триъгълник с периметър 2016. Следователно $T(2019) > T(2016)$.

б) Аналогично се вижда, че $T(2022) \geq T(2019)$. Нека $a = 1 \leq b \leq c$ са естествени и $a+b+c = 2022$. От неравенството на триъгълника $a+b > c$ получаваме, че $b > c-1$, т.е $b \geq c$. Така $b = c = \frac{2021}{2}$, което не е естествено число. Следователно не съществува целочислен триъгълник със страна 1 и периметър 2022. Това означава, че на целочислен триъгълник със страни a, b и c и периметър 2022 можем да съпоставим еднозначно целочислен триъгълник със страни $a-1$, $b-1$ и $c-1$ и периметър 2019. Триъгълник със страни $a-1$, $b-1$ и $c-1$ съществува, тъй като $a-1+b-1 > c-1$, защото $a+b-c \geq 1$ (тъй като съществува триъгълник със страни a, b и c) и $a+b-c \neq 1$ (тъй като $a+b-c = 2022-2c$ е четно число). Така $T(2019) \geq T(2022)$ и $T(2019) = T(2022)$.

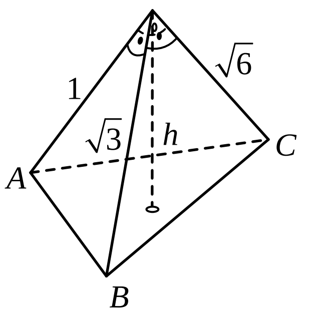
в) Нека $a \leq b \leq c$ и $a+b+c = n$. Оттук $c \geq \frac{n}{3}$ и $a \leq \frac{n}{3}$. От неравенството на триъгълника $a+b > c$ имаме, че $c < \frac{n}{2}$, а от $a = n-c-b \leq c$ се получава, че $b \geq n-2c$. Така $\frac{n}{3} \leq c \leq \frac{n}{2}$, $n-2c \leq b \leq c$ и $a = n-b-c$. За всяко фиксирано $c \in \left[\frac{n}{3}; \frac{n}{2}\right]$ имаме $c-(n-2c)+1 = 3c-n+1$ целочислени триъгълници. Общият брой на целочислените триъгълници е $\sum_{\frac{n}{3} \leq c \leq \frac{n}{2}} (3c-n+1)$, което е сума на аритметична прогресия с разлика 3. При $n = 2019$ се получава, че

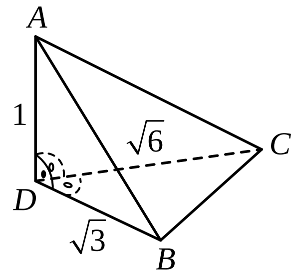
$$T(2019)=\sum_{673\le c\le 1009}(3c-2018)=\frac{(1+1009).337}{2}=170185\,.$$

ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС

1. Околните стени на тетраедър $ABCD$ са правоъгълни триъгълници, а околните ръбове $AD=1$, $BD=\sqrt{3}$ и $CD=\sqrt{6}$ са техни катети. Намерете разстоянието от върха D до равнината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека h е разстоянието от върха D до равнината на $\triangle ABC$. Ще използваме, че в тетраедър всяка стена може да бъде разглеждана като основа и нека $\triangle BCD$ е „новата” основа.

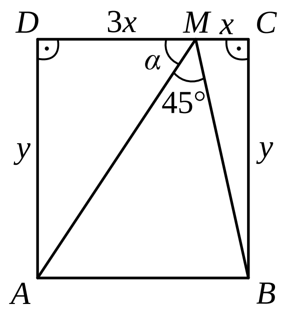




От $AD\perp BD$ и $AD\perp CD$ следва, че $AD\perp\left(BCD\right)$ и AD е височина на тетраедъра. Обемът на тетраедъра е $V=\frac{1}{3}S_{BCD}.AD=\frac{1}{3}.\frac{BD.CD}{2}.AD=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{6}}{2}.1=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Хипотенузите на правоъгълните триъгълници са $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{1+3}=2$, $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{3+6}=3$ и $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{1+6}=\sqrt{7}$. Лицето на $\triangle ABC$ пресмятаме по хероновата формула: $p=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$ и $S_{ABC}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{7}}{2}.\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}-\sqrt{7}\right).\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}-2\right).\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}-3\right)}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{7}}{2}.\frac{5-\sqrt{7}}{2}.\frac{\sqrt{7}+1}{2}.\frac{\sqrt{7}-1}{2}}=$ $=\frac{1}{4}\sqrt{\left(25-7\right)\left(7-1\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{18.6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. От $V=\frac{1}{3}S_{ABC}h=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}h=\frac{h\sqrt{3}}{2}$ и $V=\frac{\sqrt{2}}{2}$ намираме $h=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Отговор: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Точка M лежи на страната CD на правоъгълник $ABCD$ и я дели в отношение $CM:MD=1:3$. Ако $\sphericalangle AMB=45^\circ$, намерете $\operatorname{cotg}\sphericalangle AMD$.



Решение. Означаваме $CM=x$, $MD=3x$, $BC=AD=y$ и $\sphericalangle AMD=\alpha$. Тогава $\sphericalangle BMC=135^\circ-\alpha$ и от правоъгълните триъгълници AMD и BMC записваме: $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{3x}{y}$ и $\operatorname{cotg}\left(135^\circ-\alpha\right)=\frac{x}{y}$. Полагаме $\operatorname{cotg}\alpha=t$, $t>0$ и от

$$\operatorname{cotg}\alpha=3\operatorname{cotg}\left(135^\circ-\alpha\right)\ \Leftrightarrow\ \operatorname{cotg}\alpha=3\frac{\operatorname{cotg}135^\circ.\operatorname{cotg}\alpha+1}{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cotg}135^\circ}\ \Leftrightarrow t=3\frac{-t+1}{t+1}$$

получаваме уравнението $t^2+4t-3=0$ с корени $t_{1,2}=-2\pm\sqrt{7}$. Следователно $\operatorname{cotg}\sphericalangle AMD=\sqrt{7}-2$.

Отговор: $\operatorname{cotg}\sphericalangle AMD=\sqrt{7}-2$.

3. Намерете стойностите на реалния параметър m, за които неравенството $\left(m^2-9\right)x^2-2(m-3)x-2<0$ е вярно за всяко $x\in\mathbb{R}$.

Решение. При $m=3$ неравенството е $-2<0$ и е вярно за всяко $x\in\mathbb{R}$. При $m=-3$ решенията на $12x-2<0$ са числата $x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{6}\right)$ (не е изпълнено за всяко $x\in\mathbb{R}$).

При $m\neq\pm3$ неравенството $\left(m^2-9\right)x^2-2(m-3)x-2<0$ ще е вярно за всяко $x\in\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато

$$\left|\begin{array}{l}a<0\\D<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}m^2-9<0\\(m-3)^2+2\left(m^2-9\right)<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(m+3)(m-3)<0\\3(m-3)(m+1)<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-3<m<3\\-1<m<3\end{array}\right. \Leftrightarrow m\in(-1;\ 3).$$

Следователно търсените стойности на параметъра са: $m\in(-1;\ 3]$.

Отговор: $m\in(-1;\ 3]$.

4. Реалните числа x, y и θ са такива, че $y=\frac{x^2+x\sin\theta+1}{x^2+x\cos\theta+1}$.

а) Да се докаже, че $y^2+1\geq4(y-1)^2$;

б) Намерете x, ако $y=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

Решение. От неравенството $x^2+x\cos\theta+1>0$, което е изпълнено за всяко x следва, че изразът в условието е дефиниран за всяко x. Преобразуваме дадения израз във вида

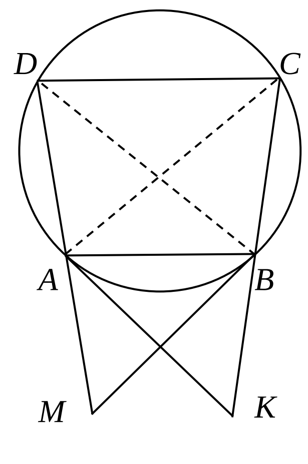
$$(y-1)x^2+(y\cos\theta-\sin\theta)x+y-1=0.$$

Тъй като x е реално число, то $D=(y\cos\theta-\sin\theta)^2-4(y-1)^2\geq0$.

а) За да докажем $y^2+1\geq4(y-1)^2$ е достатъчно да докажем $y^2+1\geq(y\cos\theta-\sin\theta)^2$. Последното неравенство е еквивалентно на $(y\sin\theta+\cos\theta)^2\geq0$ и следователно $y^2+1\geq4(y-1)^2$.

б) Пресмятаме $y^2+1=\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^2+1=\frac{32+8\sqrt{7}}{9}$ и $4(y-1)^2=4\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}-1\right)^2=\frac{32+8\sqrt{7}}{9}$, откъдето получаваме, че $(y\cos\theta-\sin\theta)^2=\frac{32+8\sqrt{7}}{9}$, или $y\cos\theta-\sin\theta=\pm\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$. От последното равенство следва, че $\frac{1+\sqrt{7}}{3}\left(x^2\pm2x+1\right)=\frac{1+\sqrt{7}}{3}(x\pm1)^2=0$. Следователно **търсените** стойности за x са $x_1=-1$ и $x_2=1$.

5. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k. Допирателната към k, през точката A, пресича правата CB в точката K (B е между C и K), а допирателната към k, през точката B, пресича правата DA в точката M (A е между D и M). Да се докаже, че поне една двойка срещуположни страни на четириъгълника $ABCD$ са успоредни, ако $AD=AM$ и $BC=BK$.



Решение. Означаваме $\sphericalangle BAD=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle ACB=\sphericalangle BDA=\varphi$, $AM=AD=b$ и $BK=BC=a$. От това, че AK е допирателна следва, че $AK^2=KB.KC=2a^2$. Аналогично $BM^2=MA.MD=2b^2$. От $AB-$медиана в триъгълник MBD следва, че

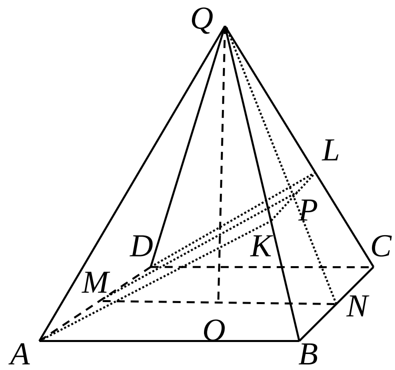
$$4AB^2 = 2\left(BD^2 + BM^2\right) - MD^2 = 2BD^2 + 4b^2 - 4b^2 = 2BD^2,$$

т.е. $BD = AB\sqrt{2}$. Аналогично, от AB – медиана в триъгълник KAC следва, че $AC = AB\sqrt{2}$, т.е. $AC = BD = AB\sqrt{2}$. От синусовата теорема за триъгълници ABC и ABD следва, че $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$ и $\frac{BD}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$. Следователно $\sin\alpha = \sin\beta$, т.е. $\alpha = \beta$ или $\alpha = 180^\circ - \beta$. В първия случай $AB \parallel CD$, а във втория $AD \parallel BC$.

6. Височината на правилна четириъгълна пирамида $ABCDQ$, с основа $ABCD$ е равна на h и образува с околните стени ъгъл с мярка α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$. През основен ръб е построена равнина β, перпендикулярна на срещулежащата околна стена.

а) Да се пресметне обемът V на пирамидата, която отсича равнината β от дадената пирамида;

б) При $h = 1$ да се намери стойността на α, за която обемът V е най-голям.



Решение. а) Нека дължината на страната на квадрата е a, а точката O е пресечната точка на диагоналите му. Нека точките M и N са среди съответно на страните AD и BC. Равнината β пресича равнината (MNQ) в правата $MP \perp (BCQ)$ $(P \in QN)$. От $AD \parallel (BCQ)$ следва, че $\beta \cap (BCQ) = KL \parallel AD$ $(K \in BQ, L \in CQ)$. Следователно сечението е трапеца $AKLD$, а V е обемът на пирамидата $AKLDQ$. От $AD \parallel KL$ и $MP \perp KL$ следва, че $MP \perp AD$. Ортогоналната проекция на QO въху равнината (BCQ) лежи върху правата QN и следователно $\sphericalangle OQN = \alpha$, а $\sphericalangle MQN = 2\alpha$. От триъгълник MNQ получаваме, че $a = 2h\,tg\alpha$ и $QN = \frac{h}{\cos\alpha}$. От триъгълник MPQ намираме $ABCD$ $QP = \frac{h\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$ и $MP = 2h\sin\alpha$. От $\triangle KLQ \sim \triangle BCQ$ следва, че $\frac{KL}{BC} = \frac{QP}{QN}$, т.е. $KL = 2h\,tg\alpha\cos 2\alpha$. Следователно $V = \frac{1}{3}S(\mathrm{AKLD})\,\mathrm{QP} = \frac{4}{3}h^3\sin^2\alpha\cos 2\alpha$.

б) Записваме $V = \frac{4}{3}\sin^2\alpha\cos 2\alpha = \frac{4}{3}\sin^2\alpha\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) = \frac{4}{3}\left(\sin^2\alpha - 2\sin^4\alpha\right)$. От равенството $\sin^2\alpha - 2\sin^4\alpha = 2\left(\frac{1}{16} - \left(\frac{1}{4} - \sin^2\alpha\right)^2\right)$ следва, че $V \le \frac{1}{6}$, като равенство се достига, когато $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}$, т.е. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ или при $\alpha = \frac{\pi}{6} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Задачите са предложени от: А. Божилов (11.4, 11.5 11.6), Е. Колев (10.4, 10.5, 10.6), И. Георгиев (9.1, 11.1, 11.2, 11.3, 12.1, 12.2, 12.3), К. Морарова (8.1, 8.2, 8.3, 9.2, 9.3, 10.1, 10.2, 11.3), С. Замковой (12.4, 12.5, 12.6), Т. Ичева (9.4, 9.5, 9.6) и Хр. Ганчев (8.4, 8.5, 8.6)